ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ №6

6 МАТЕМАТИКАЛЫҚ ТАЛДАУҒА КІРІСПЕ

Есеп 1. Берілген функциялардың туындыларын табыңыз:

а) $y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y = x^{2/3}$ дәрежелік функциясының туындысы

$$u(x) = x,\ \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} \cdot x' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

б) $y = 2^{x^3}$ көрсеткіштік функциясының туындысы

$$a = 2,\ u = x^3, \Rightarrow y' = 2^{x^3} \cdot \ln 2 \cdot \left(x^3\right)' = 2^{x^3} \cdot \ln 2 \cdot 3x^2 = 2^{x^3} \cdot 3x^2 \ln 2.$$

в) $y = \sin^2 x^3 = \left[\sin x^3\right]^2$.

$$u = \sin x^3,\ \alpha = 2 \Rightarrow y' = 2\left(\sin x^3\right)^{2-1} \cdot \left(\sin x^3\right)' \Rightarrow u = x^3 \Rightarrow 2\sin x^3 \cdot \cos x^3 \cdot \left(x^3\right)' = 3x^2 \sin 2x^3.$$

г) $y = \cos x \cdot \left(1 + x^2\right) \Rightarrow y' = \left(\cos x\right)' \cdot \left(1 + x^2\right) + \cos x \cdot \left(1 + x^2\right)' = -\sin x \cdot \left(1 + x^2\right) + 2x\cos x.$

Есеп 2. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ функциясын зерттеп, графигін салыңыз.

1. Анықталу облысы: $x = 1$ нүктесінен басқа барлақ нақты сандар жиыны.
2. $x = 1$ нүктесі функцияның үзіліс нүктесі:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{x-1} = \left(\frac{1}{1-0-1}\right) = -\left(\frac{1}{0}\right) = -\left(\frac{1}{0}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \left(\frac{1}{1+0-1}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty$$

   $x = 1$ нүктесі екінші түрдегі үзіліс нүктесі.

3. Егер $x = 0$ болса, онда $y = 0$.
   $(-\infty; 1)$ аралығында $y < 0$, ал $(1; \infty)$ аралығында $y > 0$.
4. $f(x) \neq f(-x)$, $f(x) \neq -f(x)$, $f(x + T) \neq f(x)$ болғандықтан, $f(x)$ функциясы жұп та емес, тақ та емес және периодты емес.
5. Өсу, кему аралықтарын және экстремум нүктелерін табайық.

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

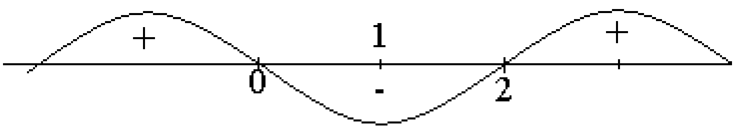
Алдымен, кризистік нүктені табамыз:

а) $y' = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\quad x_2 = 2$

б) $x = 1$ нүктесінде y' анықталмаған, ендеше $x_3 = 1$

Сонымен, кризистік нүктелер $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

y'-тің таңбасы $x^2 - 2x = x(x-2)$ таңбасымен бірдей, яғни, $x^2 - 2x \geq 0$ теңсіздігін шешу жеткілікті. Бұл квадрат теңдеудің түбірлері 0 және 2, ал x^2-тің коэффиценті оң сан. Сонымен,



а) $y' < 0$ болады, $(0;2)$ аралығында, яғни, $(0;2)$ аралығында $f(x)$ кемиді;

б) $y' > 0$ болады $(-\infty;0)$ және $(2;\infty)$ болса, яғни, $(-\infty;0)$ және $(2;\infty)$ аралықтарында $f(x)$ функциясы өседі;

в) $x_1 = 0$ нүктесінен өткенде y' таңбасын «+»-тен «-»-ке өзгертеді, $x_2 = 2$ нүктесінен өткенде таңбасын «-»-тен «+»-ке өзгертеді, ал $x_3 = 1$ нүктесінен өткенде y' таңбасын өзгертпейді.

Сонымен, $x_1 = 0$ нүктесі $\max y(x) = y(0) = 0$, $x_2 = 2$ нүктесі $\min y(x) = y(2) = 4$, $x_3 = 1$ нүктесінде экстремум жоқ.

6. Функцияның қисығының ойыс, дөңестігін және иілу нүктелерін табалық.

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

y'' -тің таңбасы (x-1)-дің таңбасымен бірдей. Ендеше,

а) $y'' < 0$ болады, $(-\infty;1)$ аралығында, яғни, $(-\infty;1)$ аралығында $f(x)$ функциясының қисығы - дөңес;

б) $y'' > 0$ болады, $(1;\infty)$ аралығында, яғни, $(1;\infty)$ аралығында $f(x)$ функциясының қисығы ойыс;

в) x=1 нүктесінде y'' анықталмаған және осы x=1 нүктесінде y'' таңбасын «–» -тан «+»-қа өзгертеді. Ендеше, $x = 1$ иілу нүктесі.

7. Асимптоталарды табалық.

а) $x = 1$ - вертикаль асимптота.

б) $y = kx + b$ -көлбеу асимптота.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x-1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1} = 1$$

Сонымен, $y = x + 1$ - көлбеу асимптота.

8. Функцияның графигін тұрғызалық.